# 共通テスト対策講座 数学ⅡB

この講座は,「大学入学共通テスト 試行調査 数学ⅡB」および「令和２年度大学入試センター試験 数学ⅡB」をベースに，大学入学共通テスト 数学ⅡBで問われる資質・能力がどんなものかを感じ取り，その後の学習に活かしていただくための講座です。

大学入学共通テストの前身であるセンター試験の数学は，問題の設定を理解し，誘導の流れや意図を把握しながら解き進め，そのプロセスおよび結果をマークすることで，大学教育の基礎となる知識・技能や，思考力・判断力・表現力を見る試験でした。別解が他に存在したとしても，限られた時間内にその流れを理解し，正確に計算し，時には立ち止まって整理し，解答に行き着き，マークまでを終える必要があるこのセンター試験の数学に関しては，記述力がある人でも点数がとれない，ということが起こり得る，そんな試験でした。

大学入学共通テストの数学においても，センター試験における出題のねらいを踏襲しつつ，さらに会話で問題を解き進めるプロセスを追体験したり，日常生活に紐付く題材を数学で解決する等，高等学校における「学びの場面」を意識した出題が含まれ，それを「試行試験」を通じて体験することができます。知識や解き方を知っているか，ではなく，その場で問題の中で展開される「初めて見る場面・設定」においても，それまでの学びで得た経験を活かしながら，基本的な知識・技能を適切に活用して解きほぐしていく，そんな力が求められます。まずは，ご紹介している問題を通じて，一緒にそれを解釈していきましょう。

最後に。この講座だけを受講すればよいのではありません。この講座で身につけた数学的な見方・考え方を，センター試験の過去問や，共通テスト向けの問題集，さらには記述式の問題集を解く際に役立てていくことにより，大学入学共通テストで問われる資質・能力がさらに養われていくでしょう。講座の受講は，始まりにすぎません。そして，その始まりは，あなたの輝かしい未来に続く道の歩みの始まりでもあります。何かを見失いそうになったとき，またこの講座に戻ってきてください。いつでも，何度でも，あなたに身につけてほしい観点を語りかけます。

山内 恵介

# 目　次

第１講　三角関数 …… p2
第２講　指数・対数関数 …… p8
第３講　図形と方程式，式と証明 …… p16
第４講　微分・積分 …… p24
第５講　数列 …… p32
第６講　ベクトル …… p42
第７講　実践演習問題 第１問・第２問 …… p52
第８講　実践演習問題 第３問・第４問 …… p64

# はじめに　受講の仕方・予習復習の仕方

## ① 予習について

講座の受講前に「講義問題」を解いてください。1～3の３問構成です。まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう。特に時間を計る必要はありません。予習をすることで自分の注力して見るべきポイントがわかった状態を作る，これが講義を受ける前に必要な準備です。予習ですべて解けている必要はございません。

## ② 講義について

予習が完了した状態で，授業動画を見ていただき，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。その際には，予習で整理した「注力して見るべきポイント」に集中しながら，また自分の解法との「差違」を感じながら受講しましょう。

## ③ 復習について

授業で扱ったポイントを頭に描きながら，まずは問題をもう一度解いてみましょう。予習での自分のやり方に満足できた部分はさらなるスピードアップを，できなかったところや新たな観点を身につけたところはそれを確かめるようにゆっくりと。また，忘れてしまった場合はもう一度講義を見直しましょう。そのようにして，ある大問を最後まで解ききったとき，その大問があなたにどんな資質・能力を要求したのかを，解答全体を見て確認しておきましょう。

そして二回目以降は，できる限り「最高速度」で問題を解いてみましょう。さらに，大問を必ず最後まで通してみましょう。すでに自分でじっくり取り組んだ問題ですので，その流れを追うことでより理解が深まり，また速度と正確性を上げる練習を行うことができます。

## ④ 講座受講後

講座受講後は，大学入学共通テストを題材として扱う市販の問題集に取り組むとよいでしょう。その場合については，上記①～③と同じように，問題と解くところから復習までじっくり取り組むとよいでしょう。また，「設定や条件を理解し，誘導の流れをつかみ，マークに合わせて解答する」という観点を身につける

には，センター試験の過去問題に取り組むことも効果的です。ただし解くだけに留まらず，大問１問を通じてどのような流れで構成されているのかを，復習時に理解し，くり返し問題に取り組む際にはその流れを意識するとよいでしょう。

# 第１講　三角関数

1 (1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

となる $\theta$ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，①は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$$

と変形できる。したがって，求める値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

(1は次ページに続く。)

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，$k$ を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は $x$ の2次方程式

$25x^2-35x+k=0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k=$ [ケコ] であることがわかる。

さらに，$\theta$ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta=\dfrac{[サ]}{[シ]}$，

$\cos\theta=\dfrac{[ス]}{[セ]}$ である。このとき，$\theta$ は [ソ] を満たす。[ソ] に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{12}$　　①　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$　　②　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

③　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　　④　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　　⑤　$\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

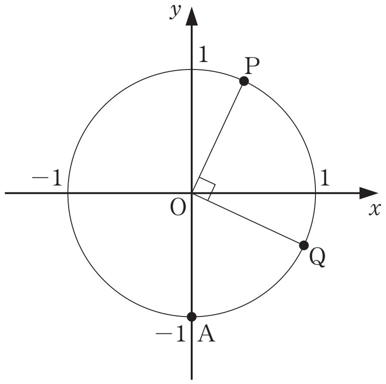
2　O を原点とする座標平面上に，点 A$(0,\ -1)$ と，中心が O で半径が 1 の円 $C$ がある。円 $C$ 上に $y$ 座標が正である点 P をとり，線分 OP と $x$ 軸の正の部分とのなす角を $\theta\ (0<\theta<\pi)$ とする。また，円 $C$ 上に $x$ 座標が正である点 Q を，つねに $\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。次の問いに答えよ。

(1)　P，Q の座標をそれぞれ $\theta$ を用いて表すと

P( ア , イ )

Q( ウ , エ )

である。 ア ～ エ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

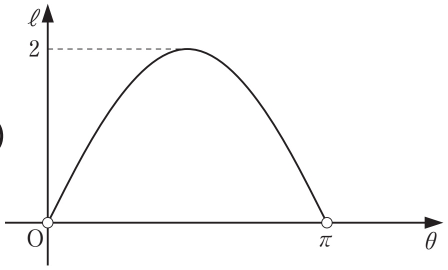


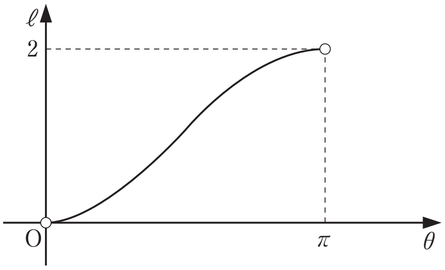

⓪ $\sin\theta$　　① $\cos\theta$　　② $\tan\theta$

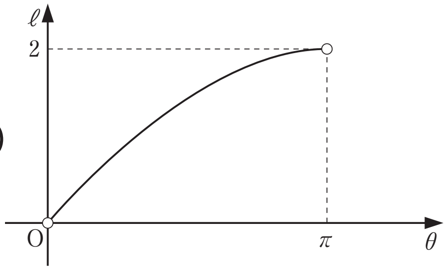
③ $-\sin\theta$　　④ $-\cos\theta$　　⑤ $-\tan\theta$

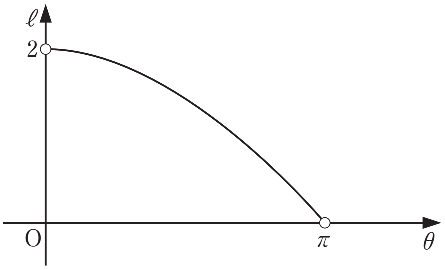
(2は次ページに続く。)

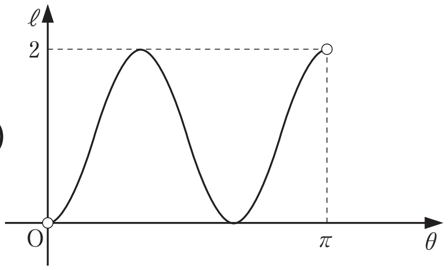
(2)　$\theta$ は $0<\theta<\pi$ の範囲を動くものとする。このとき線分 AQ の長さ $\ell$ は $\theta$ の関数である。関数 $\ell$ のグラフとして最も適当なものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。 **オ**

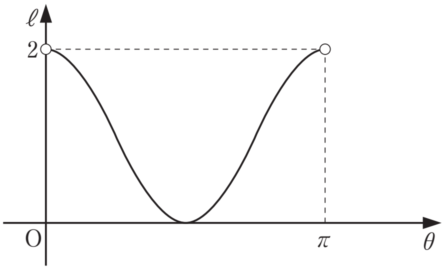
⓪


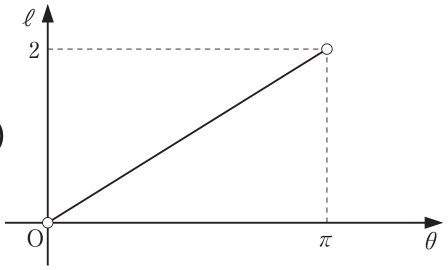

①


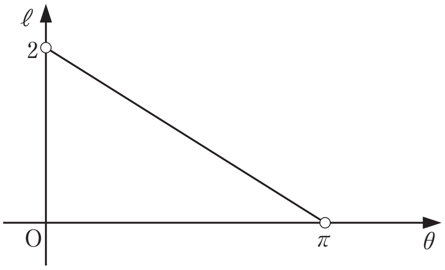

②


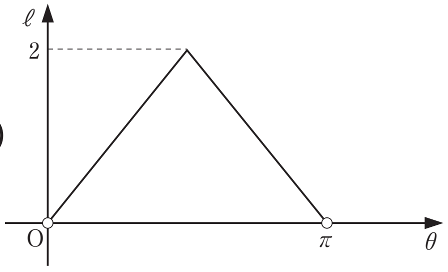

③


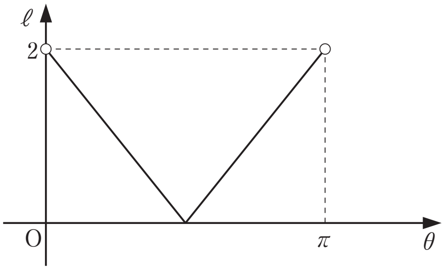

④



⑤



⑥


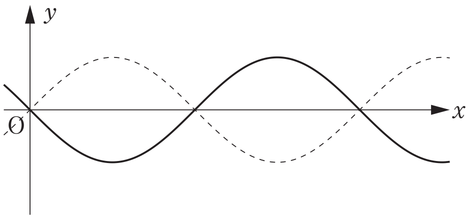

⑦


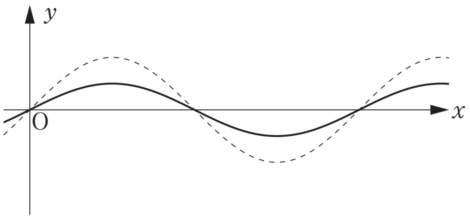

⑧


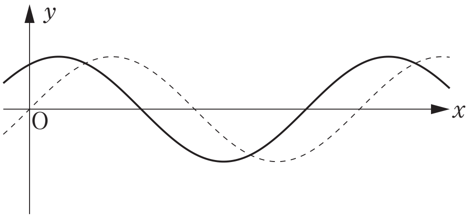

⑨


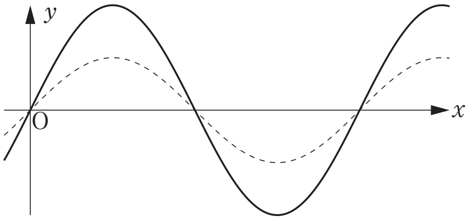
**3** (1)　下の図の点線は $y=\sin x$ のグラフである。(ⅰ)，(ⅱ)の三角関数のグラフが実線で正しくかかれているものを，下の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

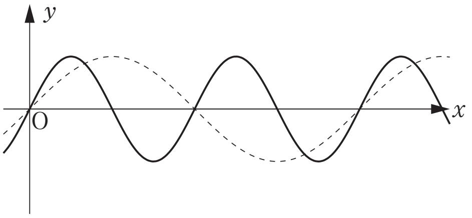
(ⅰ)　$y=\sin 2x$　［ア］　　　(ⅱ)　$y=\sin\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)$　［イ］

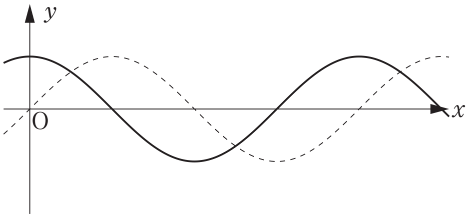
⓪


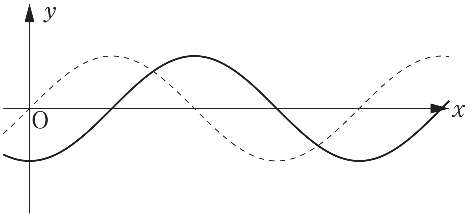

①


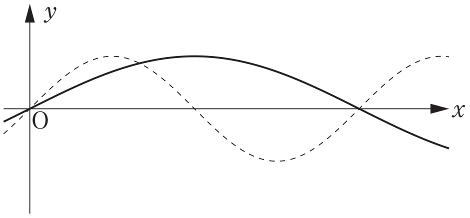

②


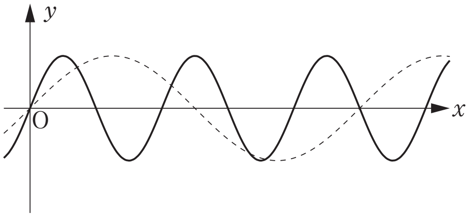

③


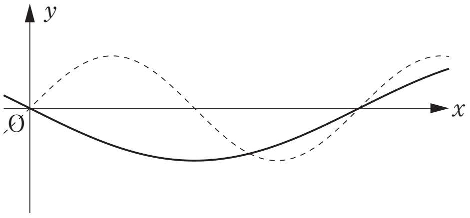

④



⑤



⑥


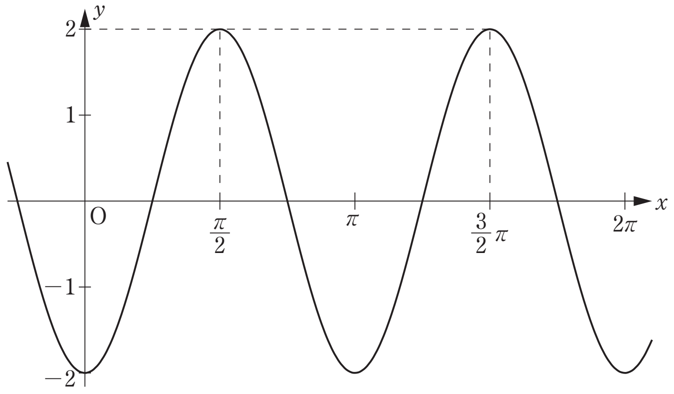

⑦



⑧



⑨



(3は次ページに続く。)

(2) 次の図はある三角関数のグラフである。その関数の式として正しいものを，下の⓪～⑦のうちから**すべて選べ**。 **ウ**




⓪ $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　① $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

② $y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$　　③ $y=\sin 2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

④ $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　⑤ $y=2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

⑥ $y=2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$　　⑦ $y=\cos 2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

# 第１講　三角関数

**1** (1) $\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}+\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$$

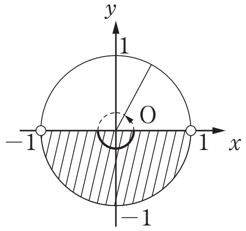
よって，$\sin\theta>\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ ……①は

$$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$$

$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta<0$　より　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<0$ と変形できる。

$0\leqq\theta<2\pi$　より　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

したがって，$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$　より　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$




(2) 2 次方程式 $25x^2-35x+k=0$ の解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であることから，解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$ ……①，　$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25}$ ……②

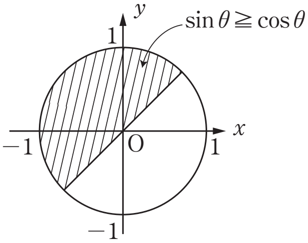
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$より，$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$

①，②を代入して，$\left(\frac{7}{5}\right)^2-2\cdot\frac{k}{25}=1$　　よって，$k=12$

したがって　$25x^2-35x+12=0$　　$(5x-4)(5x-3)=0$　　$x=\frac{4}{5}，\frac{3}{5}$

$\sin\theta\geqq\cos\theta$　より　$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$

また，$\sin\theta\geqq\cos\theta$ および $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$　より




$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{\sqrt{25}}{10}$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{50}}{10}$，

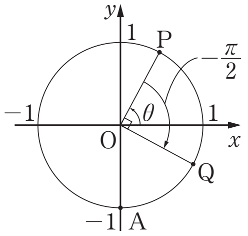
$\cos\theta=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{\sqrt{36}}{10}$　より　$\cos\frac{\pi}{3}<\cos\theta<\cos\frac{\pi}{4}$

したがって　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　(③)

**2** (1)　$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$　また，
　　①　⓪

$Q\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ より　$Q(\sin\theta,\ -\cos\theta)$
　　⓪　④




(2)　$A(0,\ -1)$，$Q(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ より，線分 AQ の長さ $\ell$ は

$$\ell=\sqrt{\sin^2\theta+(-\cos\theta+1)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta+1}$$

$$=\sqrt{2(1-\cos\theta)}=\sqrt{2\cdot2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=2\sin\frac{\theta}{2}\quad(\because\ 0<\theta<\pi)$$

よって，関数 $\ell=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフは，$\ell=\sin\theta$ のグラフを $\theta$ 軸方向に 2 倍，$\ell$ 軸方向に 2 倍したグラフである。したがって，関数 $\ell$ のグラフとして最も適当なものは　(②)

(別解) $\angle AOQ=\theta$ より，$\triangle OAQ$ において，線分 AQ の中点を M とすると

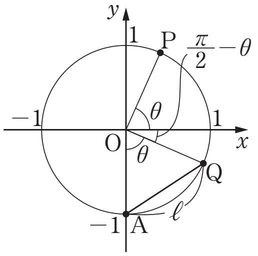
$OA=OQ=1$，$\angle AOM=\angle QOM=\dfrac{\theta}{2}$，

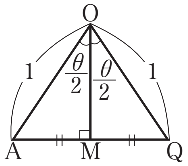
$\angle OMA=\angle OMQ=\dfrac{\pi}{2}$ より

$AM=OA\sin\angle AOM=1\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$

$=\sin\dfrac{\theta}{2}$

したがって，$\ell=2AM=2\sin\dfrac{\theta}{2}$




**3** (1)　$y=\sin 2x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを $x$ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したもの。

よって，④

$y=\sin\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)$ は $y=\sin x$ のグラフを $x$ 軸方向に $-\dfrac{3}{2}\pi$ だけ平行移動したもの。よって，⑥

(2)　グラフが $-2\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるので，③，⑦は不適。

また，グラフの $y$ 切片が $-2$ であることより，$x=0$ のとき $y=-2$ である。

$x=0$ のとき

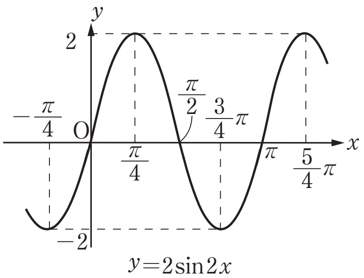
⓪：$y=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$　①：$y=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$　②：$y=2\sin\pi=0$

④：$y=2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$　⑤：$y=2\cos(-\pi)=-2$　⑥：$y=2\cos\pi=-2$

より，正しい可能性があるものは①，⑤，⑥に限られる。

①：$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

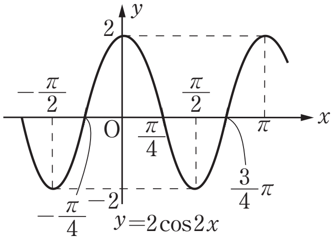
よって，$y=2\sin 2x$ のグラフを $x$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したグラフを表し，適する。




$y=2\sin 2x$

⑤：$y=2\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ は，$y=2\cos 2x$ のグラフを $x$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフを表し，適する。

⑥：$y=2\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ は，$y=2\cos 2x$ のグラフを $x$ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフを表し，適する。




$y=2\cos 2x$

したがって，正しいものは①，⑤，⑥である。